Selberg motifについて(代数幾何学とホッジ理論)

数理解析研究所講究録
803巻 1992年 216-230

Selberg motif について

千葉大学(教養) 寺杣 友秀

1. Selbergは1944年、次の公式を示した。

$$\int_{[0,1]^n} \prod_{1\leq i<j\leq n} |t_i - t_j|^{2z} \prod_{i=1}^{n} t_i^{x-1} \prod_{i=1}^{n} (1-t_i)^{y-1}\, dt$$
$$= n! \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(x+(j-1)z)\,\Gamma(y+(j-1)z)\,\Gamma(jz-1)}{\Gamma(x+y+(n+j-2)z)\,\Gamma(z+1)}$$

この公式に関して、類似の式がAskeyとEvansによってそれぞれ考察された。Askeyの予想は、いわゆるSelberg積分のq-analogとも言えるもので、Evansのそれは、有限体上のcharacter sumに関するものである。前者はKadellとHabsiegerにより独立に、後者は、G. Andersonにより示された。AndersonはEvans予想を解くために2つの多項式のResultantを用いたが、さらにその考え方は、curveの対称積を考えることにより幾何学的に解釈される。少し図式的に言うならば、Selberg integralに付随するmotifは、Fermat hypersurfaceのmotifで生成されるということである。ゆえにこの証明法は、periodやcharacter sumに対する結果を統一的に扱う方法であるといえる。この報告ではそのことを示すとともに、最後に、q-analogに関するAskey予想を上の考察をもとに、KadellやHabsiegerとは別の証明法を与える。このため、q-hypergeometric functionのdeterminantに関する結果が必要とな

って来る。

2. Motifの定義　kおよびLを標数0の体とする。Sをk上smoothなvarietyとする。次のdata(M1)〜(M5)を考える。

(M1) (M1.1) Variation of (pure) Hodge structure.

すべてのkの$\mathbb{C}$への埋め込みσに対して、$\sigma(S)(\mathbb{C})$上のL-係数のlocal systemを対応させるsystem$\{\mathcal{H}_{B,\sigma}\}$が、L-variation of pure Hodge structureであるとは、すべてのLの$\mathbb{C}$への埋め込み$\tau: L \hookrightarrow \mathbb{C}$に対して、$\mathcal{H}_{B,\sigma} \underset{L,\tau}{\otimes} \mathcal{O}_{\sigma(S)}$がholomorphic Hodge filtration $\mathcal{F}^{\bullet}_{\sigma,\tau}$をもち、すべての$\sigma(S)(\mathbb{C})$の点$s$に対して、(weightをwとする)

$$\bigoplus_{p+q=w} \left[\mathcal{F}^{p}_{\sigma,\tau}(\mathcal{H}_{B,\sigma} \otimes_{\tau} \mathbb{C}(s)) \cap (\mathrm{id} \otimes \iota)\mathcal{F}^{q}_{\sigma,\iota\tau}(\mathcal{H}_{B,\sigma} \underset{\iota\tau}{\otimes} \mathbb{C}(s))\right] \cong \mathcal{H}_{B,\sigma} \underset{\tau}{\otimes} \mathbb{C}(s)$$

が成り立つことである。ここでιは$\mathbb{C}$のcomplex conjugateである。

(M1.2) Variation of mixed L-Hodge structure

kのすべての埋め込みσ $\mathbb{C}$に対して、$\sigma(S)(\mathbb{C})$上のL-係数のlocal system $\mathcal{H}_{B,\sigma}$とその上のholomorphicなfiltration $\mathcal{F}^{\bullet}_{\sigma,\tau}$と、$\mathcal{H}_{B,\sigma}$のlocal systemとしてのfiltration $W_{k,\sigma}$ (weight filtration)が与えられ、$Gr^{W}_{k}(\mathcal{H}_{B,\sigma})$と、$\mathcal{F}^{p}_{\sigma,\tau}$によって誘導されたfiltrationがvariation of pure Hodge structureとなる時、(weightはw) $\mathcal{H}_{B,\sigma}$をvariation of mixed Hodge structureという。

(M2) Mixed étale sheaf　$\mathcal{H}_{A^f}$は、S上のlocally free $A^f \otimes L$ étale sheafで、weight filtration Wをもって

いる。よって $\mathcal{H}_{A^f}$ は、S 上の étale sheaf なので、$\bar{\eta}$ を S の geometric point とすると、$\mathcal{H}_{A^f,\bar{\eta}}$ は $Gal(\bar{\eta}/\eta)$ の作用を持っている。さらに $Gr_k^W(\mathcal{H}_{A^f})$ は、wt w の (potentially pure) な S 上の étale sheaf になると仮定する。ここで weight w の potentially pure な sheaf とは、S のある $\mathbb{Z}$ 上 finite な regular scheme $\mathcal{S}$ が存在して、$\mathcal{H}_{A^f}$ は $\mathcal{S}$ 上の étale sheaf から induce され、$\mathcal{S}$ の closed geometric point での $\mathcal{H}_{A^f}$ への geometric Frobenius の action の複素絶対値はその剰余体の order の $\frac{w}{2}$ 乗になっていることである。

(M3) <u>De Rham realization</u> $=$ S 上の locally free sheaf で、regular integrable connection をもつもの。

$\mathcal{H}_{DR}$ は $S\otimes L$ 上の locally free $\mathcal{O}_S\otimes L$ module の sheaf. (S 上は locally free になるかどうかはわからない。) 言い換えれば、M を体として、$k \underset{\sigma}{\hookrightarrow} M$, $L \underset{\tau}{\hookrightarrow} M$ を fix した時、$\mathcal{H}_{DR} \underset{\sigma,\tau}{\otimes} M$ が、$\mathcal{O}_S \underset{k}{\otimes} M$ locally free module となることと同値である。また $\mathcal{H}_{DR}$ は、integrable で regular な connection ∇ をもっている。さらに weight filtration W があり、∇ で stable である。ただし、regularity を論ずるために、S の compact 化 $\bar{S}$ は fix する。また、$\mathcal{O}_S\otimes L$-free な filtration $\mathcal{F}$ が存在して、Griffiths-tranversality

$$\nabla_{\sigma,\tau}(\mathcal{F}^i \underset{\sigma,\tau}{\otimes} M) \subset \mathcal{F}^{i-1} \underset{\sigma,\tau}{\otimes} M$$ を満たす。

さらに、(M1)(M2)(M3) の間に次の compatibility を課す。

(M4) $\underline{\mathrm{Comp}}_{A^f,B}$ — 任意のkのCへの埋め込み $\sigma: k \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して，自然なtopologyの射 $S_{\mathbb{C},cl} \xrightarrow{j} (S\otimes\mathbb{C})_{et}$ による $\mathcal{H}_{B,\sigma}$ のdirect image $j_*(\mathcal{H}_{B,\sigma}\otimes A^f)$ と $\mathcal{H}_{A^f}|_{S\otimes\mathbb{C}}$ との間のWを保つ同型：$\mathrm{comp}_{A^f,B}(\sigma)\ \mathcal{H}_{A^f}|_{S\otimes\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} {}_*(\mathcal{H}_{B,\sigma}\otimes_{L,\tau}(L\otimes A^f))$ が与えられている。$k=S$ の時はこれは，任意のkの代数的閉包 $\bar{k}$ のCへの埋め込み $\bar{\sigma}$ でk上σを与えるものに対して，$\mathrm{comp}_{A^f,B}(\bar{\sigma}): \mathcal{H}_{A^f}(\bar{k}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{B,\sigma}\otimes_L(L\otimes A^f)$ なる同型で，$\mathcal{H}_{A^f}(\bar{k})$ への $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ のactionとcompatibleになるものを与えることと同値である。

(M5) $\underline{\mathrm{Comp}}_{B,DR}$ — 任意のk及びLのCへの埋め込みσ, τに対して．$\mathrm{Comp}_{B,DR}: \mathcal{H}_B\otimes_\tau\mathcal{O}_{(S\otimes\mathbb{C})an} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{DR}\otimes_{(\mathcal{O}_{S,\tau})}\mathcal{O}_{(S\otimes\mathbb{C})an}$ なる同型が存在して，しかもそれぞれのfiltration $\mathcal{F}_{\sigma,\tau}$ とWは，この同型を通じて一致する。また右辺の∇-flatなsectionが，左辺のlocally constantなsectionと一致する。

<u>定義（S上のLを係数とするrealization）</u> 上にあげた5つのpair $(\{\mathcal{H}_{B,\sigma}\}_{\sigma:k\hookrightarrow\mathbb{C}},\ \mathcal{H}_{A^f},\ \mathcal{H}_{DR},\ \mathrm{comp}_{A^f,B},\ \mathrm{comp}_{B,DR})$ のなすcategoryをS上のLを係数とするrealizationのcategoryという。Realizationのcategoryでmorphismとは，それぞれの構造，compを保つ $\{\mathcal{H}_{B,\sigma}\}$, $\mathcal{H}_{A^f}$, $\mathcal{H}_{DR}$ 間のlinear mapのことである。容易にわかる様に，realizationのcategoryは，⊗, ⊕, Homをもつabel圏である。S上のreduced scheme

$\mathfrak{X}$に対して、$\mathcal{H}^i(\mathfrak{X}, L)$を、$(\{R^i(\sigma(f))_* L,\ R^i f_{et*}(L\otimes \mathbb{A}^f),$ $\mathcal{H}^i_{DR}(\mathfrak{X}/S)\underset{\mathbb{Q}}{\otimes} L,\ comp_{\mathbb{A}^f,B},\ comp_{B,DR})$は自然な仕方でrealizationの元となる。ここでfは、構造射$f:\mathfrak{X}\to S$である。これは、S上のschemeに対するcontravariant functorである。($\mathcal{H}^i_{DR}(\mathfrak{X}/S)\underset{\mathbb{Q}}{\otimes} L$は、$\mathfrak{X}$がsmoothでない時は、意味を少し変えなくてはならない。$\mathcal{H}^2(\mathbb{P}^1\times S, L)$を$L(-1)$と書く。Realization $\mathcal{H}$に対して、$\mathcal{H}\otimes L(-1)^{-m}$ $(m\geq 0)$ あるいは、$\mathrm{Hom}(L(-1)^{+m}, \mathcal{H})$ $(m\geq 0)$を、$\mathcal{H}(m)$と書く。(M1)(M2)(M3)のfiltration $W_\bullet$が、$W_k=$全体, $W_{k-1}=0$となる時、このmixed motifは、pureでwt kをもつといわれる。今$\mathfrak{X}\xrightarrow[f]{} S$がprojective smoothならば、$\mathcal{H}^i(\mathfrak{X},L)$はpureでwtは$i$である。またこの時、Poincare dualityにより、fがrelative dimension nをもてば、$\mathcal{H}^i(\mathfrak{X},L)\otimes\mathcal{H}^{2n-i}(\mathfrak{X},L)\to L(-2n)$はperfect pairingである。ゆえに、$\mathfrak{X}$、$\mathfrak{Y}$それぞれS上projective smoothでrelative dimentionがn, mとすれば、ZをS上proper flatなcycleで、codimensionがpure d-次元ならば、上のPoincare dualityとfunctorialityを用いて、$\mathcal{H}^i(\mathfrak{Y},L)\longrightarrow\mathcal{H}^{i+2(d-m)}(\mathfrak{X},L)(m-d)$: $x\mapsto pr_{1*}(pr_2^* x\wedge cl(Z))$が定義される。ここで$pr_{1*}$は、Poincare dualityによって定まるpr_1^*のtranspozeである。また、$\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$内のpure codimension dのS上proper flatなcycleのL係数の和を考えれば、それもまた同じく、$\mathcal{H}^i(\mathfrak{Y},L)$から

$\mathcal{H}^{i+2(d-m)}(Y, L)(m-d)$ への morphism を与える。この様な cycle の形式的な和を correspondence と呼ぶ.

(定義) Motif の圏　$\mathcal{H}^i(X, L)$ の形の object から $\otimes$, $\oplus$, dual, 及び Correspondence による kernel, cokernel image をとる操作によって生成された realization を motif という。motif の圏の morphism とは correspondence から induce されたものを考える。Motif には自然に rank (たとえば $\mathcal{H}_B$ の local system としての次元) が定義でき、それにより、最高階の外積として determinant が定義できる。rank が 1 の motif を invertible motif という。この章は invertible motif over $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ として最も重要である Fermat motif を定義して終えることにしよう.

(定義) Fermat motif　X^n を $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ 上定義された affine variety $X^n: x_0^d + \cdots + x_n^d = 1$ とする $(d > 1)$ 今 $G = \mu_d^{(n+1)}$ は $(g_0, \cdots, g_n) \in G$ が $(x_0, \cdots, x_n)$ の各成分への積によって作用する. $\chi = (\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$ $(\alpha_i \in \mathbb{Z}/d)$ を G の指標とする時、χ への projection p_χ を $p_\chi = \sum_{g \in G} \cdot \frac{1}{|G|} \chi^{-1}(g) g^*$ で定義する。$L = \mathbb{Q}(\zeta_d)$ とおく. $p_\chi \cdot H^n(X^n, L)$ は もし. $\alpha_0 \neq 0, \cdots, \alpha_n \neq 0$, $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n \neq 0$ なら pure wt n の invertible motif となる。これを Fermat motif といい、$F(\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$ あるいは. $F(\chi)$ と書く。α の形により weight n は自然にわかるので以下 n は省く。また、

$F(\underbrace{\alpha_1,\cdots,\alpha_1}_{n_1\,コ},\cdots,\underbrace{\alpha_p,\cdots,\alpha_p}_{n_p\,コ})$ を. $F(n_1\alpha_1,\cdots,n_p\alpha_p)$ と書く。

3. Selberg integral に対する motif.

Selberg integral は. 次の variety S_n の period と考えられる。

$$S_n:\ s^d=\prod_{i=1}^{n} t_i,\quad t^d=\prod_{i=1}^{n}(1-t_i),\quad u^d=\prod_{i>j}(t_i-t_j)=w^2.$$

S_n には. 群 $\mu_d\times\mu_d\times\mu_d\times\mu_2$ が s, t, u, w への積により作用する。S_n は. t_i の置換により方程式の形が変わらないので. $A^n/\mathfrak{S}_n$ 上の covering と見る。φ を μ_2 の nontrivial な character, α, β, γ を μ_d の character とする。$H^n(S_n, \mathbb{Q}(\zeta_d))(\alpha,\beta,\gamma,\varphi)$ で定義される $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ 上の motif を考える。これを Selberg motif $S_n(\alpha,\beta,\gamma,\varphi)$ と書く.

定理 $\gamma^i\ (i=1,\cdots,n)$, $\alpha\gamma^i$, $\beta\gamma^i\ (i=0,\cdots,n-1)$ 及び $\alpha\beta\gamma^i$ $(i=n-1,\cdots,2n-2)$ が nontrivial であるとする。この時. motif としての同型

$$S_n(\alpha,\beta,\gamma,\varphi)=\bigotimes_{i=0}^{n-1}F(\alpha\gamma^i,\beta\gamma^i,\gamma,\varphi)\otimes\bigotimes_{i=0}^{n}F((n-i)\gamma)^{-1}$$

が存在する.

定理の証明は. 次の命題を示すことにより得られる。

命題 γ, γ^{n+1}, α, β, $\alpha\beta\gamma^n$ が nontrivial character であるとする。この時. motif としての同型

$$F((n+1)\gamma)\otimes S_{n+1}(\alpha,\beta,\gamma,\varphi)\cong F(\alpha,\beta,n\gamma)\otimes S_n(\alpha\gamma,\beta\gamma,\gamma,\varphi)$$

が存在する.

さて以下、命題の証明をしよう。まず初めに、Resultant variety $\tilde{R}_n$ を、$\tilde{R}_n$: $s^d=\prod_{i=1}^{n+1} y_i$, $t^d=\prod_{i=1}^{n+1}(1-y_i)$, $u^d=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n+1}(x_j-y_i)\times(-1)^{\varepsilon}$, $\varepsilon=\frac{1}{2}n(n+1)$ で定義すれば、これは $\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^{n+1}=\{(x,y)\}$ の $\mu_d\times\mu_d\times\mu_d$-covering である。$\tilde{R}_n$ には、x_i 及び y_j の座標の入れかえにより、$\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_{n+1}$ が作用するが、R_n を、$\tilde{R}_n/(\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_{n+1})$ で定義すれば、$pr_1: R_n\longrightarrow\mathbb{A}^n/\mathfrak{S}_n$, $pr_2: R_n\longrightarrow\mathbb{A}^{n+1}/\mathfrak{S}_{n+1}$ が存在する。次に、$A_n/\mathfrak{S}_n$ 及び $A_{n+1}/\mathfrak{S}_{n+1}$ 上の R_n と、ある twist された Fermat hypersurface の間の correspondence を定義する。今、$\xi_1,\cdots,\xi_n$ 及び $\eta_1,\cdots,\eta_{n+1}$ を $x_1,\cdots,x_n$ 及び $y_1,\cdots,y_{n+1}$ の基本対称式とする。$f_x(\eta)=\prod_{i=1}^{n+1}(x-y_i)$ で定義される、$\eta_1,\cdots,\eta_{n+1}$ に関する linear form とする。まず、$R_n\times_{A_n/\mathfrak{S}_n}A_n$ と、A_n 上の Fermat hypersurface F_1 の間の correspondence を定義する。ここで F_1 は、twisted Fermat hypersurface である。F_1: $\sum_{i=0}^{n+1}\delta_i x_i^d=1$, $\delta_0=\prod_{i=1}^{n}x_i^{-1}$, $\delta_{n+1}=\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}$ $\delta_i=-\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)$ $(i=1,\cdots,n)$ で定義される。$x_i^d=f_{x_i}(\eta)$, $x_0^d=\eta_{n+1}$, $x_{n+1}^d=f_1(\eta)$ とおいてこれが F_1 を満たすことから、$(x_0,\cdots,x_{n+1})$ を、$(s,t,u)=(x_0,x_{n+1},x_1\cdots x_n)$ に対応させることにより、F_1 から $R_n\times_{A_n/\mathfrak{S}_n}\mathbb{A}^n$ への $\mathbb{A}^n$ 上の morphism を与える。さらにこれは、$\mathfrak{S}_n\ltimes(\mu_d\times\mu_d^n\times\mu_d)$ equivariant であることを考えれば、次の $A_n/\mathfrak{S}_n$ 上の motif の同型を得る。

命題 $\mathcal{H}^{n+1}(R_n, L)(\alpha, \beta, \gamma) \cong \Delta_n^* F(\alpha, \beta, n\gamma) \otimes K(\alpha\gamma, \beta\gamma, \gamma, \phi)$

ここで Δ_n は、$A^n/\mathfrak{S}_n \to \mathbb{Q}(3d)$ なる構造射、$K(\alpha\gamma, \beta\gamma, \gamma, \phi)$ は、$A^n/\mathfrak{S}_n$ 上の Kummer covering S_n の character $(\alpha\gamma, \beta\gamma, \gamma, \phi)$-part に対する motif である。条件から、$F(\alpha, \beta, n\gamma)$ は、pure weight $(n+1)$ の motif である。

系 $H^i(R_n, L)(\alpha, \beta, \gamma) \cong F(\alpha, \beta, n\gamma) \otimes H^{i-(n+1)}(S_n, L)(\alpha\gamma, \beta\gamma, \gamma, \phi)$

なる motif の同型が存在する。

同様の議論を pr_2 に対してもくり返すことにより、

$$H^i(R_n, L)(\alpha, \beta, \gamma) \cong F((n+1)\gamma) \otimes H^{i-n}(S_{n+1}, L)(\alpha, \beta, \gamma, \phi)$$

を得る。2つの同型を合わせて命題を得る。

3. q-analog

q-analog については、Askey [A] の論文があるので、それを引用することにして、まず notation を定義しよう。§4については preprint [T] ができているので、参照されたい。

今、$q \in \mathbb{C}$ を、$0 \neq |q| < 1$ なる複素数として、$q = \exp(2\pi i \tau)$ を満たす τ を fix する。この τ を fix することにより、任意の実数 α に対して、$q^\alpha = \exp(2\pi i \tau \alpha)$ と定義する。また、$f(x)$ を $\mathbb{C}^\times$ 上の関数とした時、その Jackson integral を下の右辺が収束する時

$$\int_0^r f(x)\, d_q x = r(1-q) \sum_{i=0}^{\infty} f(rq^i) q^i$$

で定義する。もっと一般に、$\int_{r_1}^{r_2} f(x)\, d_q x = \int_0^{r_2} f(x)\, d_q x - \int_0^{r_1} f(x)\, d_q x$

と定義する。任意 $a \in \mathbb{C}$ に対して $(a)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i)$ は絶対収束する。また $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $(a)_\alpha = (a)_\infty / (q^\alpha a)_\infty$ で定義する。α が自然数の時は、これは q の多項式である。Γ-関数の q-analog Γ_q を、$\Gamma_q(\alpha) = \{(q)_\infty / (q^\alpha)_\infty\} \cdot (1-q)^{1-\alpha}$ で定義すると、$q \to 1$ の時は、古典的な Γ-関数に収束する。よって、$\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, $\tau = (\tau_i) \in \mathbb{R}^n$ で、$\tau_i - \tau_j \notin \mathbb{Z}\ (i \neq j)$ とする。

q-hypergeometric function $f(\tau, \alpha, \beta, x)$ 及び $F_i(\tau, \alpha, \beta)$ $(i = 1, \cdots, n)$ を、

$$f(\tau, \alpha, \beta, x) = x^\alpha \prod_{i=1}^{n} (q^{-\tau_i} x)_{\beta_i}, \quad F_i = \int_0^{q^{\tau_i}} f(\tau, \alpha, \beta, x)\, d_q x$$

で定義する。今までの条件のもとで、これは well defined である。これは、$q^{-\tau_i} = y_i$ とおいて、$q \to 1$ の時を考えれば、古典的な Appel の hypergeometric function になる。

4.1. q-hypergeometric function の determinant

この章では 2 種類の determinant を計算しよう。

4.1.1 第一の determinant formula

$$D(\alpha, \beta) = \det \begin{pmatrix} F_1(\tau, \alpha, \beta), \cdots, F_1(\tau, \alpha+n-1, \beta) \\ \vdots \\ F_n(\tau, \alpha, \beta), \cdots, F_n(\tau, \alpha+n-1, \beta) \end{pmatrix}$$

とすると、

定理

$$D(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma_q(\alpha+1) \prod_{i=1}^{n} \Gamma_q(\beta_i + 1)}{\Gamma_q(\alpha + \sum_{i=1}^{n} \beta_i + n + 1)} \prod_{i=1}^{n} q^{(\tau_i+1)(\alpha+1)} \times$$

$$\prod_{i \neq j} (q^{-\tau_i + \tau_j + 1})_{\beta_i} \prod_{i > j} q(q^{\tau_i} - q^{\tau_j}).$$

証明　$F(\tau,\alpha,\beta)={}^t(F_1(\tau,\alpha,\beta),\cdots,F_n(\tau,\alpha,\beta))$ とおくと、$\sum_{j=0}^{n} m_j F(\alpha+j,\beta)=0$ なる差分方程式を満たすことが、Stokes の定理の q-analog から出て来る。ただし、m_j は、$\sum_{j=0}^{n} m_j x^j = q^{-\alpha-1}\prod_{i=1}^{n}(1-q^{-\tau_i-1}x)-\prod_{i=1}^{n}(1-q^{-\tau_i+\beta_i}x)$ によって定義される。

今、差分方程式 R_i を、$(R_i f)(\alpha,\beta)=f(\alpha,\beta+e_i)$（ただし、$e_i=(0,\cdots,\overset{i}{1},\cdots,0)$）で定義する。

命題　$$(R_iD)(\alpha,\beta)=\frac{\prod_{j=1}^{n}(1-q^{\beta_i-\tau_i+\tau_j+1})}{1-q^{\alpha+1}\prod_{j=1}^{n}q^{\beta_j+1}}D(\alpha,\beta)$$

証明　左辺は、$\det(F(\alpha,\beta)-q^{-\tau_i+\beta_i}F(\alpha+1,\beta),\cdots,F(\alpha+n-1)-q^{-\tau_i+\beta_i}F(\alpha+n,\beta))$ なので、上の差分方程式を使って命題を得る。

上の命題をくり返し使い、

$$D(\alpha,\beta)=\frac{(q^{\alpha+1}\prod_{j=1}^{n}q^{\beta_j+1})_\infty}{\prod_{i,j}(q^{\beta_i-\tau_i+\tau_j+1})_\infty}D(\alpha,(\infty,\cdots,\infty))$$

を得る。$\beta=(0,\cdots,0)$ の時に再びこの式を使い、定理を得る。

4.1.2 第二の determinant formula

前節で定義した hypergeometric function に対して、α が整数、β_i が自然数、で、τ_i が全て自然数の時は、やはり hypergeometric function が定義され、また別の determinant formula が成り立つ。β が自然数の時は、被積分関数は、x に関する多項式なので、$\tau_i-\tau_j\in\mathbb{Z}$ の時にも、積分は意味がある事に注意する。$y_0,\cdots,y_n\in q^{\mathbb{N}}$ とする。

$$g(y_0, m, x) = x^m \prod_{i=0}^{n} (y_i^{-1} x)_\beta \ , \ G_j = \int_{y_j}^{y_{j+1}} g(y_0, m, x) d_q x$$

$$D(y_0) = \det \begin{pmatrix} G_0(y_0, 0), \cdots, & G_0(y_0, n-1) \\ \vdots & \\ G_{n-1}(y_0, 0), \cdots, & G\ (y_0, n-1) \end{pmatrix}$$

とおく．2つ目の determinant formula は．

<u>定理</u>

$$D(y_0) = q^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\Gamma_q(\beta+1)^{n+1}}{\Gamma_q((n+1)(\beta+1))} \prod_{0 \leqq i \neq j \leqq n} (q y_i^{-1} y_j)_\beta \prod_{n \geqq i > j \geqq 0} (y_i - y_j)$$

<u>証明</u>　今．$\lim_{y_0 \to 0} y_0^\beta G_i(y_0, m) = (-1)^\beta q^{\beta(\beta-1)/2} \int_{y_j}^{y_{j+1}} x^{m+\beta} \prod_{i=1}^{n} (y_i^{-1} x)_\beta d_q x$

を使って．$\lim_{y \to 0} y_0^{n\beta} D(y_0)$ が前節から計算される。$D(y_0)$ と．$D(q y_0)$ の関係は．前節と同様に．Stokes の定理を使い．

$$D(q y_0) \frac{\prod_1 (1 - q^\beta y_0^{-1} y_j)}{1 - q^{(n+1)(\beta+1)}} (1 - q^{\beta+1}) = D(y_0) \frac{\prod_0 (1 - q^{-\beta-1} y_0^{-1} y_j)}{1 - q^{-(n+1)(\beta+1)}}$$

で与えられる。これより定理を得る．

<u>4.2．Askey 予想の別証について</u>

この章では．ある多変数の被積分関数の Jackson integral に関する Fubini の定理を使い．それによって．Selberg integral の inductive な関係式を与える。まず差積の q-analog を定義し．Askey 予想を述べよう．今．$D_n^{(\gamma)}(x)$ を．

$D_n^{(\gamma)}(x) = \Delta_n(x)^2 \cdot \prod_{i \neq j} (q x_i x_j^{-1})_{\gamma-1} \prod_{i=1}^{n} x_i^{(n-1)(\gamma-1)}$ で定義する。
$(\Delta_n(x) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$ である$)$

$\delta_n = \{0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq 1 \mid x_i \in q^{\mathbb{Z}}\}$ として．Selberg integral の

q-analog を

$$S_n(\alpha,\beta,\gamma) = \int_{S_n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{n} (qx_i)_{\beta-1} D_n^{(\gamma)}(x)\, d_q x$$

で定義する。

<u>定理</u>（Askey 予想, Kadell, Habsieger）

$$S_n(\alpha,\beta,\gamma) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma_q(\alpha+i\gamma)\,\Gamma_q(\beta+i\gamma)\,\Gamma_q((n-i)\gamma)}{\Gamma_q(\gamma)\,\Gamma_q(\alpha+\beta+(n-1+i)\gamma)}\, q^{\mu(\alpha,\gamma,n)} \cdot (-1)^{n(n-1)\gamma/2}$$

が成り立つ。ここで, μ は次の式で与えられる。

$$\mu(\alpha,\gamma,n) = \gamma^2 n(n-1)(n-2)/3 + \gamma(\gamma-1)n(n-1)/4 + \alpha\gamma n(n-1)/2$$

さて, この定理の証明に用いられる被積分関数, 及び積分領域であるが, それは次の $I(x,y)$ 及び D で与えられる。

$$I(x,y) = \Delta_{n+1}(y)\,\Delta_n(x) \prod_{i=0}^{n} y_i^{\alpha-1} \prod_{j=1}^{n} x_j^{(n+1)(\gamma-1)}$$
$$\prod_{i=0}^{n} (qy_i)_{\beta-1} \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=0}^{n} (q^{2-\gamma} x_j^{-1} y_i)_{\gamma-1}$$

$$D = \{0 \leqq y_0 \leqq x_1 \leqq y_1 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq y_n \leqq 1 \mid x_i, y_j \in q^{\mathbb{Z}}\}$$

積分 $\int_D I(x,y)\, d_q x\, d_q y$ を次の 2 通りの仕方で求める。(多変数の Jackson integral とは, 単に $d_q x_1, \cdots, d_q x_n, d_q y_0, \cdots d_q y_n$ の積測度で与えられたものと考える。)

(1) $$\int_{S_n} \left\{ \int_{D(x)} I(x,y)\, d_q y \right\} d_q x$$

$$D(x) = [0, x_1] \times [x_1, x_2] \times \cdots \times [x_n, 1]$$

$$S_n = \{0 \leqq x_1 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq 1 \mid x_i \in q^{\mathbb{Z}}\}$$

(2) $\int_{S_{n+1}} \left\{ \int_{D(y)} I(x,y)\, d_q x \right\} d_q y$

$D(y) = [y_0, y_1]\times\cdots\times[y_{n-1}, y_n]$,

$S_{n+1} = \{0 \leqq y_0 \leqq y_1 \cdots \leqq y_n \leqq 1 \mid y_i \in q^{\mathbb{Z}}\}$

(1),(2) 共に、まず内側の積分から計算するが、それには4.1で求めた determinant の結果が使われる。紙面の都合上、ここでは(1)の内側の積分の計算のみをすることにしよう。

$$\int_{D(x)} I(x,y)\, d_q y = \Delta_n(x) \prod_{j=1}^{n} x_j^{(n+1)(\gamma-1)} \times A. \text{ ここで、}$$

$$A = \int_{[0,x_1]\times\cdots\times[x_n,1]} \Delta_{n+1}(y) \prod_{i=0}^{n} y_i^{\alpha-1} \prod_{i=0}^{n} (q y_i)_{\beta-1} \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=0}^{n} (q^{2-\gamma} x_j^{-1} y_i)_{\gamma-1}\, d_q y$$

となる。今後簡単のため、$x_0=0$, $x_{n+1}=1$ と書き、$\{0,\dots,n\}$ の置換を $\mathfrak{S}_{n+1}$ と書く。

$$A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=0}^{n} \int_{[x_i,x_{i+1}]} y^{\sigma_i+\alpha-1} (qy)_{\beta-1} \prod_{j=1}^{n} (q^{2-\gamma}x_j^{-1}y)_{\gamma-1}\, d_q y$$

$$= \det\left(\int_{[x_i,x_{i+1}]} y^{k+\alpha-1}(qy)_{\beta-1} \prod_{j=1}^{n} (q^{2-\gamma}x_j^{-1}y)_{\gamma-1}\, d_q y \right)_{i,k}.$$

となる。$(q^{2-\gamma}x_j^{-1}y)_{\gamma-1}$ は $y=x_j, qx_j, \dots, q^{\gamma-2}x_j$ で $(j=1,\dots,n)$ 0 であり、$(qy)_{\beta-1}$ は $y=q^{-1}$ で 0 なので、積分区間 $[0,x_1],\dots,[x_i,x_{i+1}]$ $\cdots[x_n,1]$ はそれぞれ $[0,q^{\gamma-2}x_1],\dots,[q^{\gamma-2}x_i, q^{\gamma-2}x_{i+1}],\dots,[q^{\gamma-2}x_n, q^{-1}]$ でとりかえてかまわない。そこで、前節の determinant の公式を使えば、

$$
\begin{aligned}
A &= D(\tau, \alpha-1, (\gamma-1, \cdots, \gamma-1, \beta-1)) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)^n}{\Gamma(\alpha+\beta+n\gamma)} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-\gamma+1} \prod_{i=1}^{n} (x_i)_{\beta+\gamma-1} \prod_{i\neq j} (q x_i x_j^{-1})_{\gamma-1} \\
&\quad (-1)^{n(\gamma-1)} q^{K_1}, \qquad K_1 = n\alpha(\gamma-1) + n(n-1)(\gamma-1)/2 - n(\gamma-1)(\gamma-2)/2
\end{aligned}
$$

となる。ゆえに(1)の積分は、Selberg integral を用いて、

$$
\int_D I(x,y)\, d_q y\, d_q x = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)^n}{\Gamma(\alpha+\beta+n\gamma)} (-1)^{n(\gamma-1)} q^{K_1+K_2} S_n(\alpha+\gamma, \beta+\gamma, \gamma)
$$

となる。ここで $K_2 = n(\alpha+\gamma-1) + n(n-1)(\gamma-1) + n^2$. (2)の積分も同様であるが、二番目の determinat formula を使うことろが異なる。結果として、(2)の表現は、

$$
\int_D I(x,y)\, d_q x\, d_q y = \frac{\Gamma_q(\gamma)^{n+1}}{\Gamma_q((n+1)\gamma)} \cdot q^{K_3}\, S_{n+1}(\alpha, \beta, \gamma),
$$

$$
K_3 = -n(n+1)(\gamma-1)(\gamma-2)/2 + n(n+1)/2
$$

を得て、上の二つの式を比較して、Selberg integral に関する inductive な式を得る。

References [A] Askey, Some basic hypergeometric extensions of integrals of Selberg and Andrews, SIAM. J. Math Anal., 18 (1987) pp. 938–951

[T] T: Determinants of q-hypergeometric functions and another proof of Askey conjecture. (preprint)